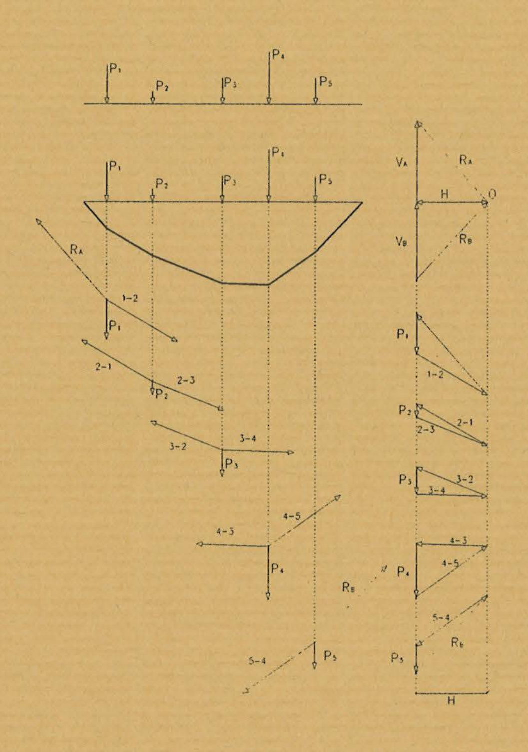
FUNICULARES

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-05

FUNICULARES

por

Ricardo Aroca Hernández-Ros

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-05

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

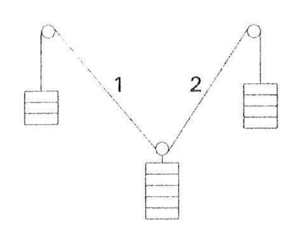
1 Área
16 Autor
05 Ordinal de cuaderno (del autor)

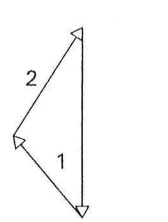
TEMAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Funiculares

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 52.06 / 1-16-05
ISBN: 84-9728-155-1 (5ª edición)
Depósito Legal: M-10599-2005

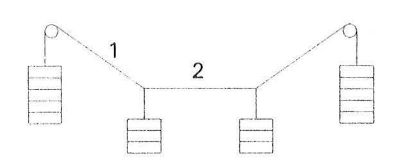


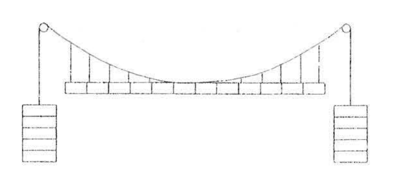


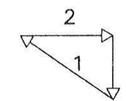
FUNICULARES

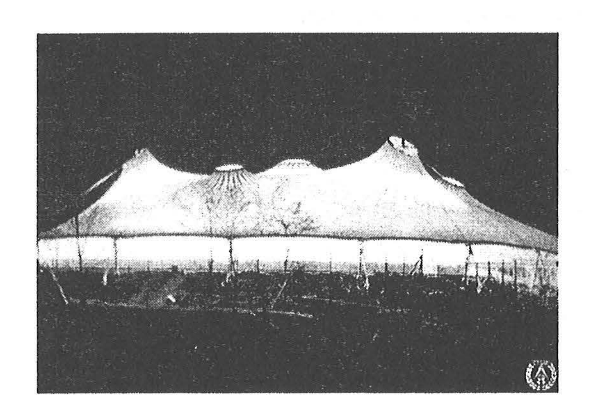
No es difícil imaginar ni materializar estructuras formadas por un hilo en equilibrio sometido a la acción de una o varias fuerzas.

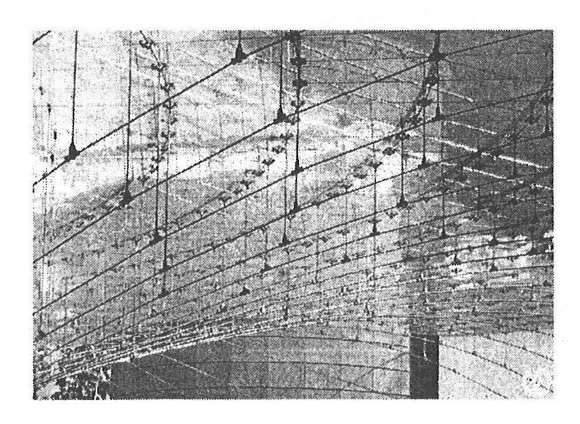
Un hilo sólo admite solicitaciones en su dirección y adquiere automáticamente la forma de una estructura no sólo viable sino además muy eficaz.



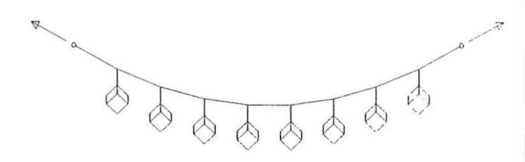






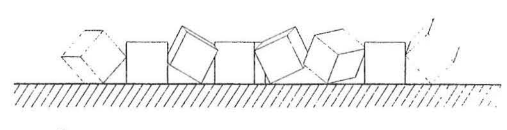


Un hilo con una serie de pesos colgados encuentra por sí solo la forma de equilibrio que corresponde a la de menor energía potencial del sistema.



MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

El procedimiento fue usado tradicionalmente para encontrar la forma de arcos e incluso de complejos cruces de arcos (ver GAUDÍ) ya que invirtiendo especularmente el trazado obtenido se consiguen soluciones de equilibrio formadas por elementos sólo comprimidos.

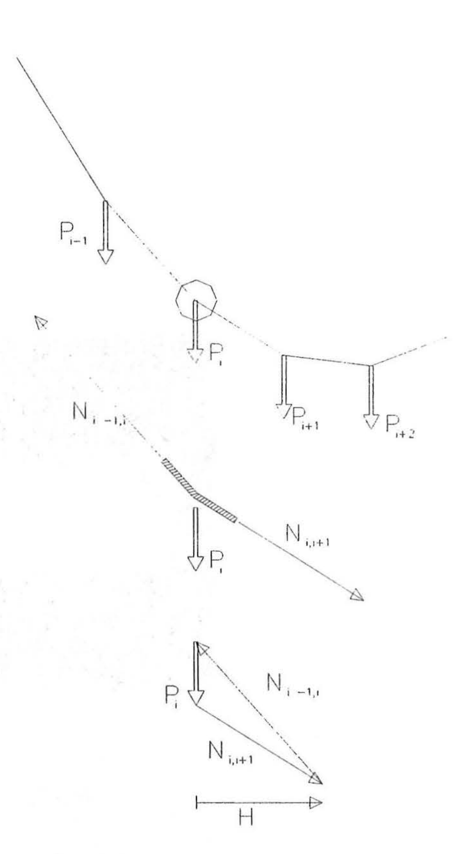


MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

Una estructura comprimida no es capaz de encontrar la mejor forma de trabajo ya que la mínima energía potencial del sistema corresponde a la estructura arruinada.

EL EQUILIBRIO DE HILOS

EQUILIBRIO LOCAL



Las condiciones de equilibrio local de un hilo son muy simples:

a) EQUILIBRIO DE NUDOS

En cada punto de aplicación de una carga debe haber equilibrio entre ésta y las solicitaciones de los tramos concurrentes, lo que geométricamente se materializa mediante el cierre del polígono de fuerzas.

(Cabe notar que para que el polígono cierre, el valor de la proyección de ambas solicitaciones en dirección perpendicular a P_i debe ser el mismo).

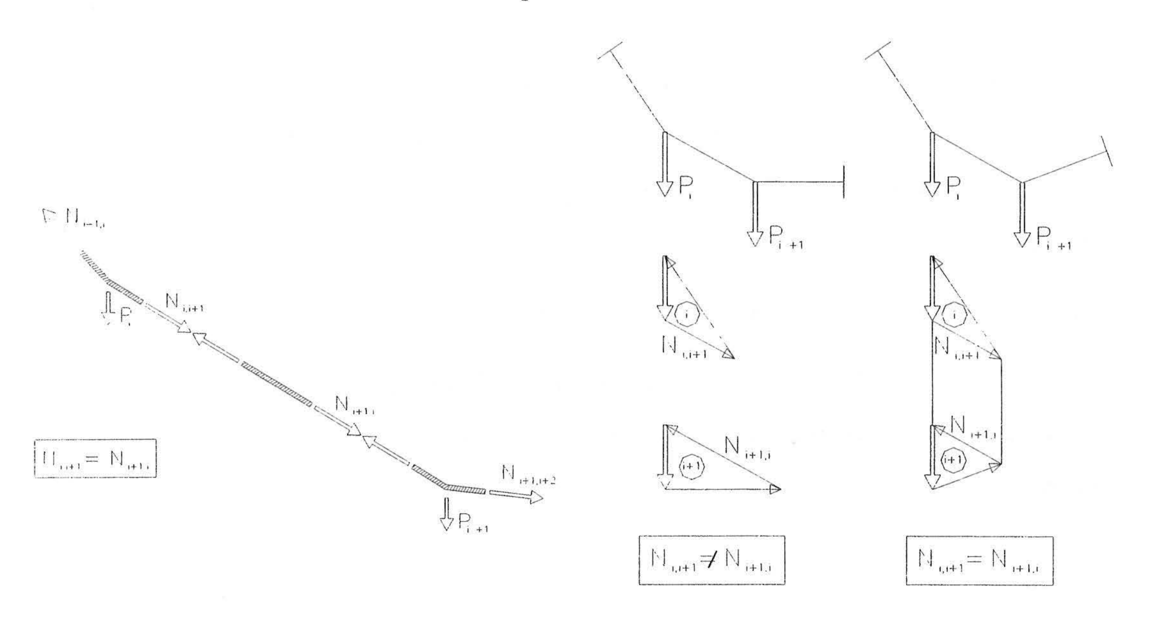
Ateniéndose únicamente a esta condición cualquier forma poligonal del hilo proporciona equilibrio en los nudos, bastando únicamente que los tramos de hilo adyacentes formen un cierto ángulo.

Existe no obstante otra condición:

b) COMPATIBILIDAD

Cada tramo de hilo debe estar también en equilibrio, por lo que las solicitaciones en sus extremos deben ser iguales y de signo contrario.

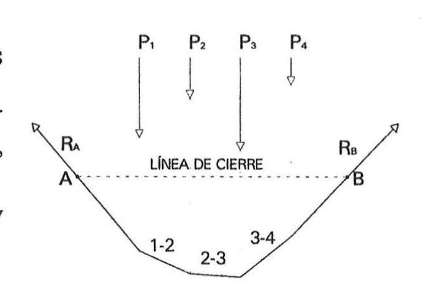
Desde el punto de vista geométrico ello se traduce en que los polígonos de fuerza equilibrados de nudos adyacentes deben poder adosarse entre sí.



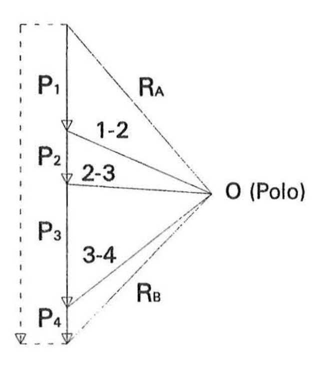
Equilibrio incompatible,
solución imposible

Las condiciones de equilibrio de nudos y compatibilidad se satisfacen simultáneamente si todos los polígonos de fuerza equilibrados son adyacentes, lo que se consigue mediante el trazado de un **polígono funicular** que predice la forma de equilibrio que adoptará un hilo que materialice el equilibrio de un sistema de vectores deslizantes.

El polígono funicular no es más que la sistematización de los equilibrios de cada uno de los nudos. Para trazarlo basta dibujar el sumatorio de las fuerzas, elegir un punto arbitrario "O" (**polo**) fuera del mismo, unirlo a los extremos de las fuerzas y trazar paralelas a las líneas 1-2, 2-3, 3-4



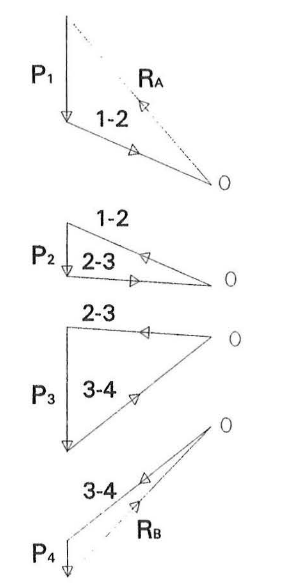
Al elegir el **polo** "O" se determinan las solicitaciones R_A y R_B de los tramos extremos del hilo que son a su vez las reacciones que se producen si se sustenta la estructura fijando los extremos del hilo.

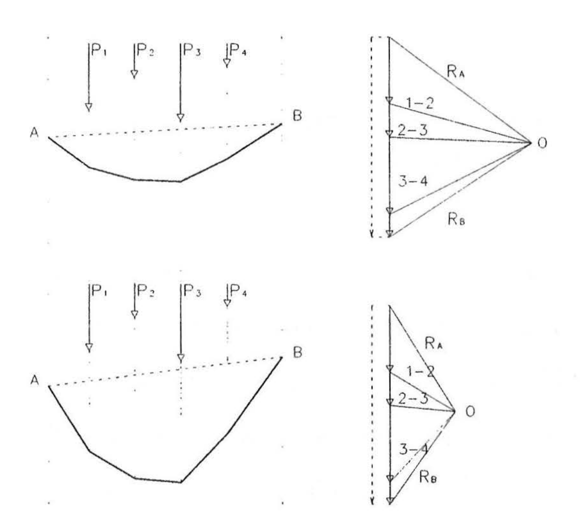


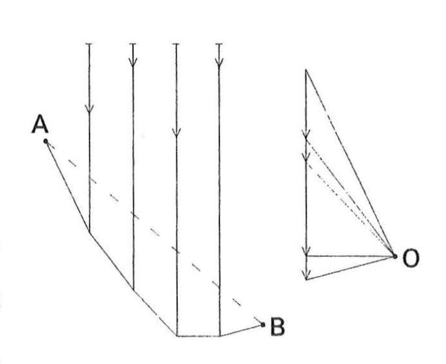
En el proceso se elige una **escala de longitudes** para el trazado del hilo, por ejemplo 1:50, es decir, 1 cm = 0,5 m, y una **escala de fuerzas** para el sumatorio y los polígonos de equilibrio, por ejemplo 1 cm = 10 kN.

La elección del polo "O" tiene dos grados de libertad:

Si el polo "O" está próximo al sumatorio el hilo será largo y las solicitaciones pequeñas; si está alejado las solicitaciones serán grandes y el hilo corto.

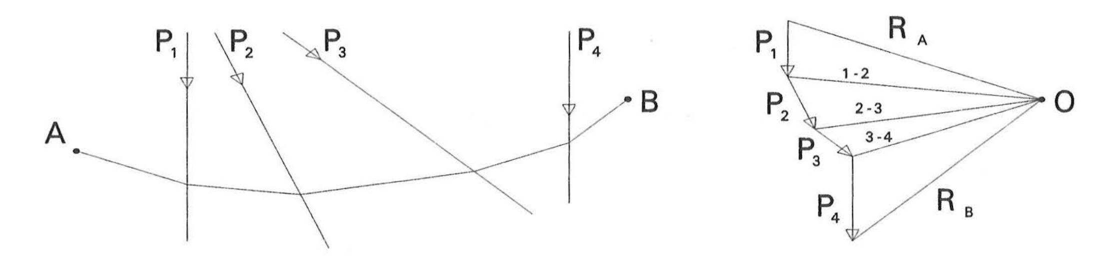






Por otra parte al mover en vertical la posición del polo se modifica la inclinación de los tramos del hilo, la posición relativa de los extremos y la magnitud e inclinación de las reacciones.

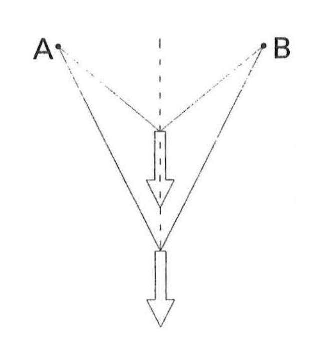
Como puede verse, las reglas son muy simples, y aunque en lo que sigue se opera únicamente con sistemas de fuerzas paralelas, el procedimiento puede aplicarse a sistemas más complejos.



La solución geométrica es tan sencilla que para apreciar la complejidad del problema hay que plantear la solución analítica:

PLANTEAMIENTO ANALÍTICO DEL EQUILIBRIO DE UN HILO SOMETIDO A UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS

Suponiendo un sistema de n fuerzas cuyo equilibrio se materializa mediante un hilo sustentado en los extremos A y B, éste tendrá $n + 1$ tramos por lo que habrá $n + 1$ incógnitas de solicitación correspondientes a la de cada uno de ellos: R_A, N_{12}, N_{23},....., R_B.



El equilibrio de momentos de cada uno de los nudos está garantizado al ser concurrentes las tres fuerzas, quedan pues las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas que proporcionan en total $2n$ ecuaciones de equilibrio que para $n > 1$ exceden ampliamente el número de incógnitas. (Para $n = 1$ el equilibrio siempre es posible para cualquier trazado que cumpla las condiciones de contorno)

Esto significa que las solicitaciones de los tramos del cable no describen de forma adecuada el problema, que puede verse de otra forma: la definición analítica del trazado del hilo se

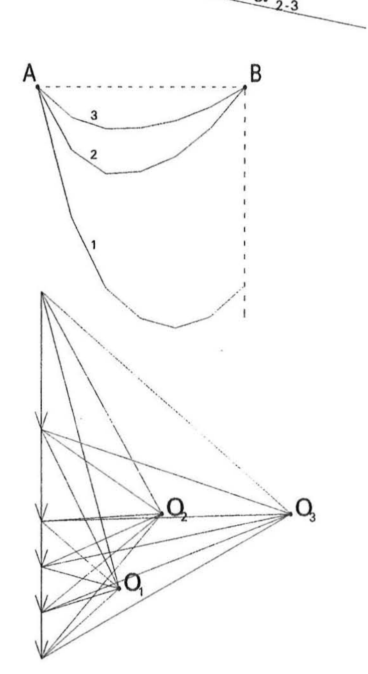
materializa en $n + 1$ incógnitas : α_A ,$\alpha_{1\text{-}2}$,...., α_B; correspondientes a las inclinaciones de los tramos del cable.

Expresado de esta forma el sistema tiene:

$2n + 2$ incógnitas

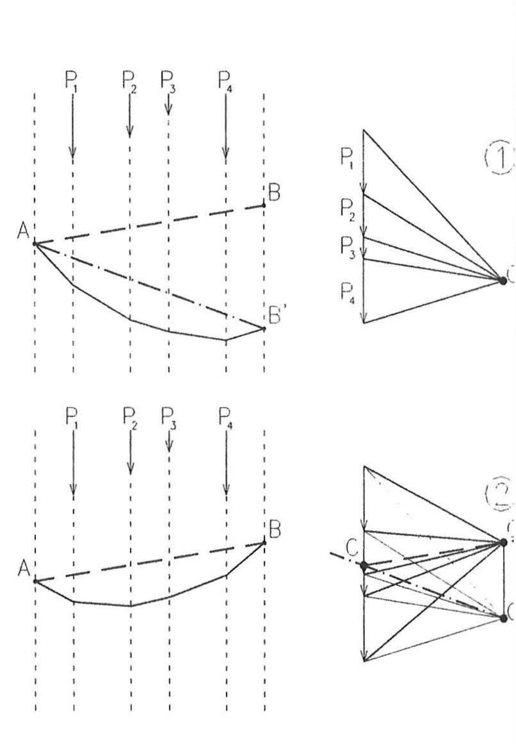
$2n$ ecuaciones de equilibrio

Esto da lugar a un conjunto doblemente infinito de soluciones.



Las dos ecuaciones que faltan para que la solución sea única son de naturaleza geométrica: Simplemente, una vez elegido el punto de arranque, y suponiendo que este sea el extremo izquierdo, que el trazado pase por otros dos puntos, uno de ellos el apoyo derecho y el otro el que marca el peralte del funicular (que son precisamente los que corresponden a los dos grados de libertad en la elección de la posición del **polo** "O" del funicular).

FUNICULAR QUE PASA POR DOS PUNTOS DADOS A Y B:



El procedimiento de trazado es el siguiente:

1 Se elige de forma arbitraria un polo O' y se traza un funicular que cortará en B' a la recta por B paralela a las fuerzas.

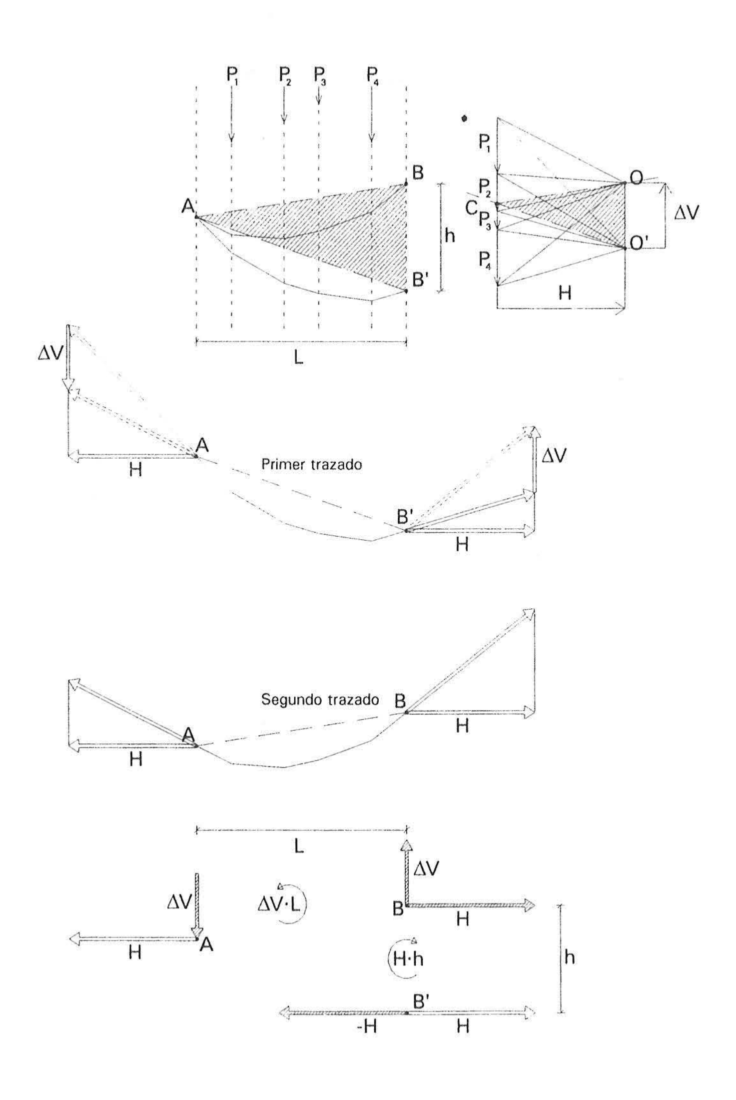
2 En el polígono de equilibrio de fuerzas se traza por O' una línea paralela a la línea de cierre AB' del funicular que corte al sumatorio de fuerzas en C. Desde C se traza una paralela a la línea de cierre AB del funicular que se pretende trazar, cualquier punto de esta línea elegido como polo O da lugar al trazado de un funicular que pasa por A y B.

Justificación del procedimiento

Al trasladar el extremo derecho del funicular de B' a B no se altera el equilibrio de las fuerzas verticales ni el de las horizontales aunque sí aparece un Momento desequilibrado $H{\cdot}h$. La única manera de mantener el equilibrio es que las componentes verticales de reacción varíen de forma que se produzca un Momento igual en sentido contrario: $\Delta V{\cdot}L = H{\cdot}h$. De lo que se deduce que:

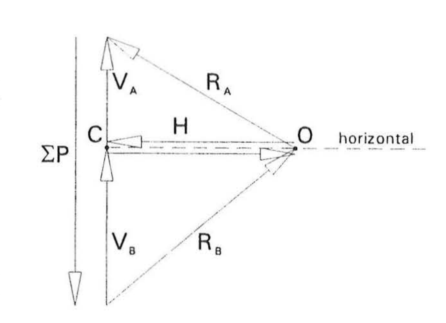
$$\frac{\Delta V}{H} = \frac{h}{L}$$

La semejanza de los triángulos rayados justifica el trazado.



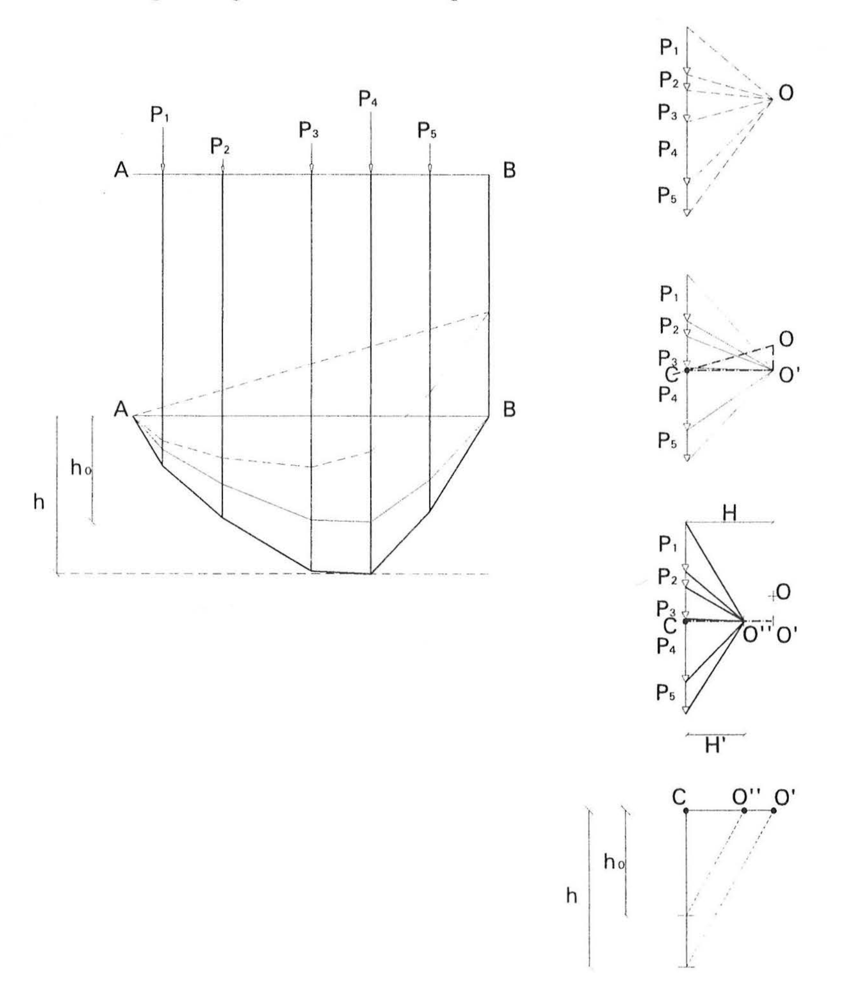
FUNICULARES CON LÍNEA DE CIERRE *AB* HORIZONTAL

Cualquier funicular trazado a partir de un polo situado en la línea horizontal que pasa por C pasa por los puntos A y B.

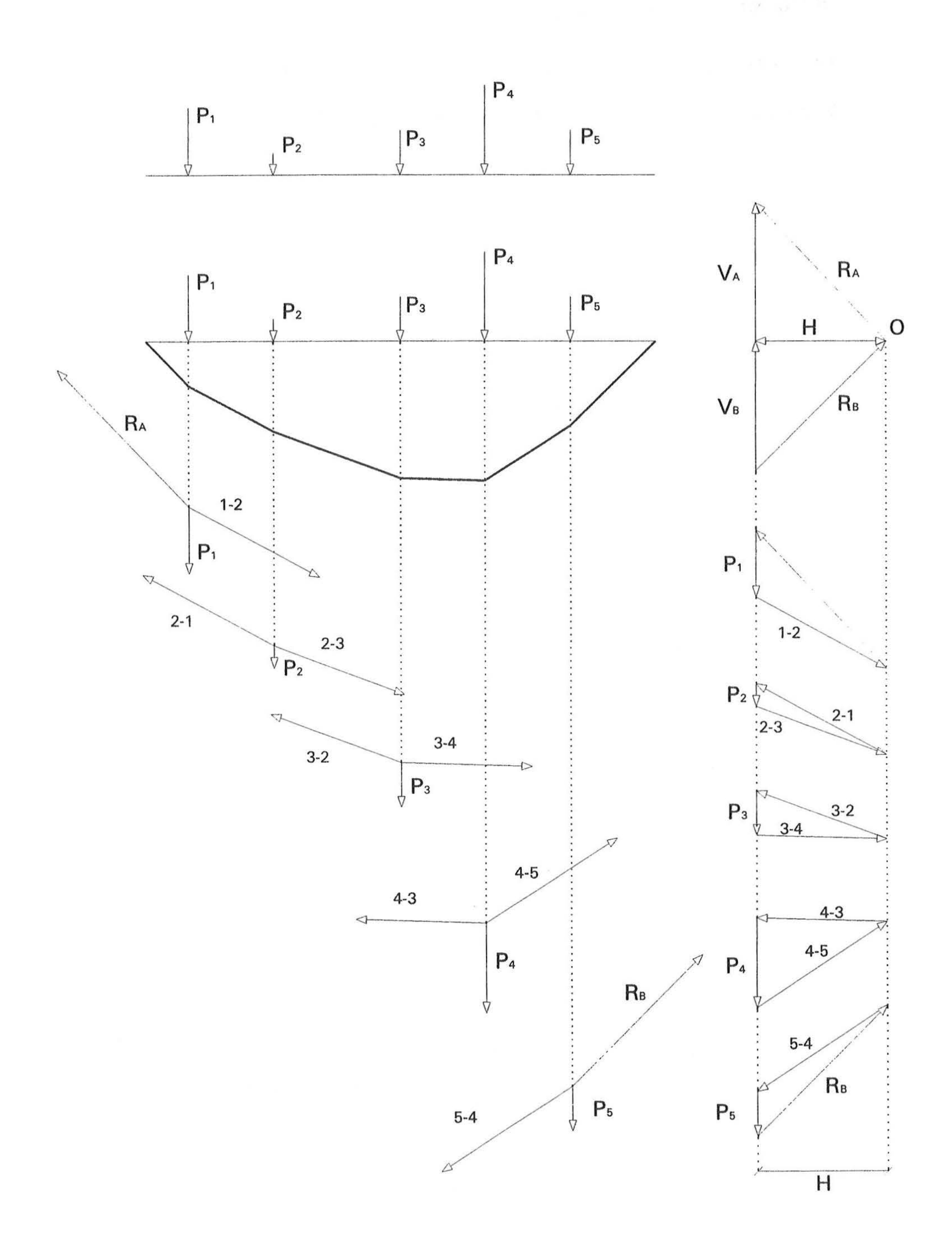


Las reacciones necesarias en A y B tendrán para todos los funiculares con polo en esa línea las mismas componentes verticales V_A y V_B y una componente horizontal variable H que será la distancia del polo O al sumatorio.

Es fácil conseguir no sólo que el funicular pase por dos puntos dados, sino que tenga un determinado peralte *h*.



Es importante recordar que en el caso de fuerzas verticales la componente horizontal de solicitación en cada tramo es constante e igual a H (cuyo valor determina el peralte del funicular), mientras que la componente vertical es la suma de las fuerzas verticales situadas a la izquierda incluida V_A.

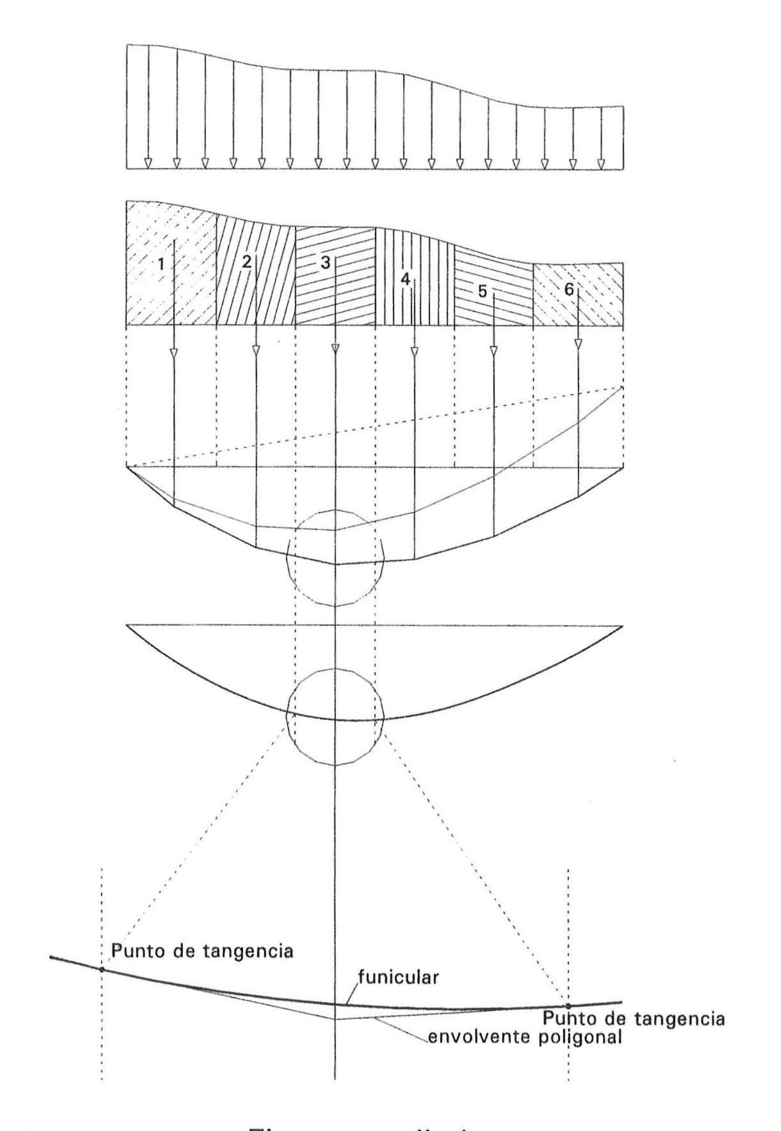


CARGAS REPARTIDAS

Para trazar el funicular de una carga repartida se *trocea* la carga en resultantes parciales.

El funicular real es una curva tangente a la poligonal en los puntos de división de la carga.

La curvatura del funicular en cada punto es función de la intensidad de la carga local y de la fuerza horizontal H.



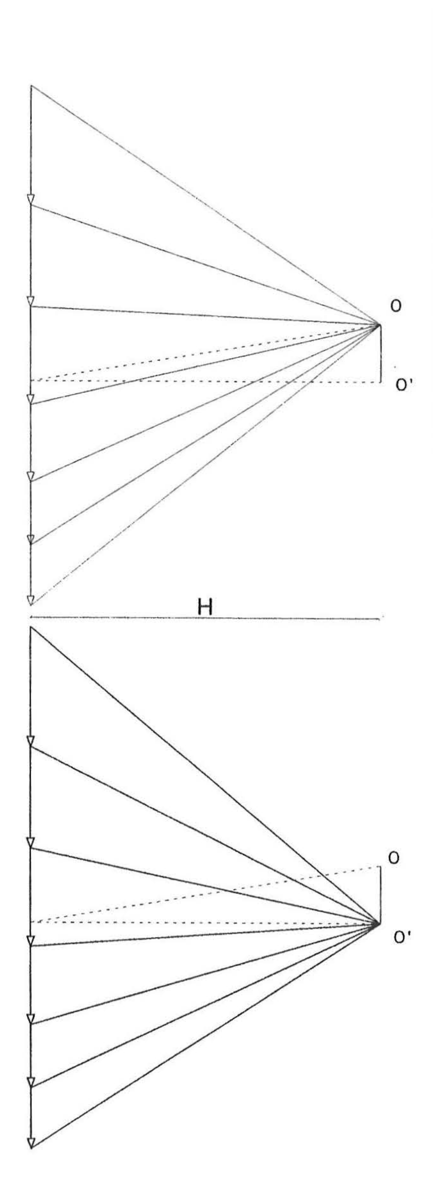
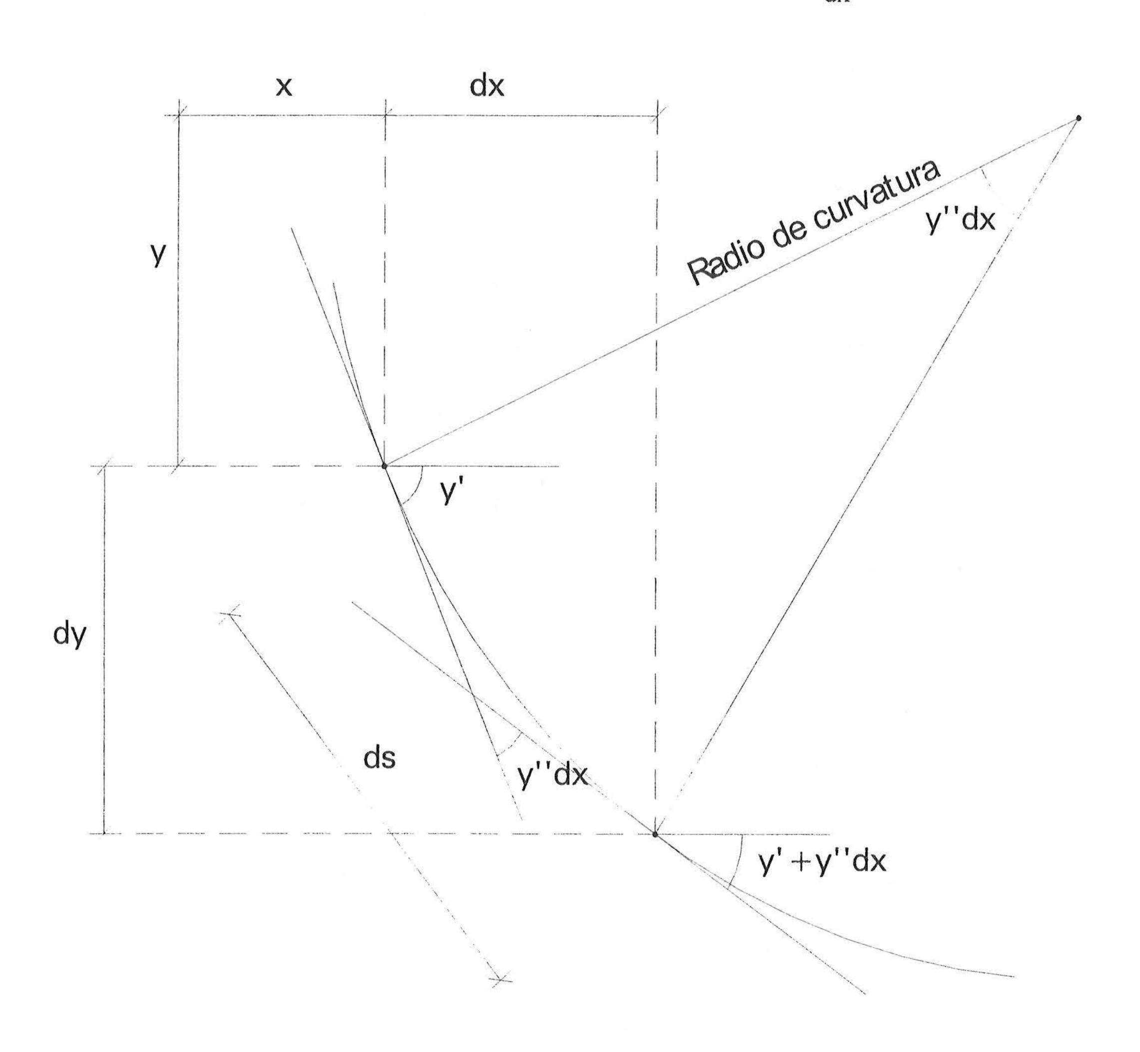


Figura ampliada

CURVATURA

Dada una curva y(x), la pendiente y' de las tangentes en dos puntos próximos difiere en el ángulo $\frac{dy'}{dx}dx = y''dx$.



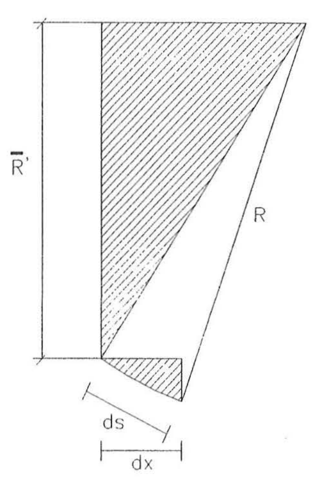
Se llama **radio de curvatura** R al de la circunferencia tangente a la curva en los puntos y(x) e y(x+dx) cuando dx→0.

Se llama **curvatura** al valor $\frac{1}{R}$

$$\frac{ds}{R} = y''dx \qquad \frac{1}{R} = y''\frac{dx}{ds} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{luego} \quad \frac{1}{R} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Puede establecerse una relación geométrica de un cierto interés



Ambos triángulos rayados son semejantes $\frac{dx}{ds} = \frac{\overline{R}'}{R}$

sustituyendo en $y''\frac{dx}{ds} = \frac{1}{R}$ $\qquad y''\frac{\overline{R}'}{R} = \frac{1}{R}$

queda finalmente $y'' = \frac{1}{\overline{R}}$

es decir, **la segunda derivada de una curva es la inversa de la proyección vertical del radio de curvatura.**

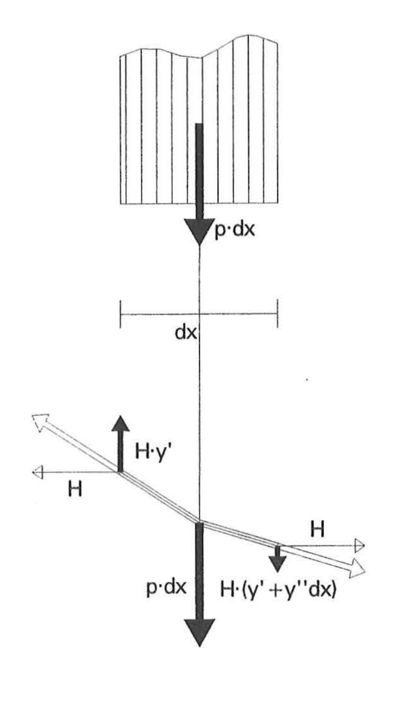
Cuando la tangente y' es próxima a la horizontal $R' \approx R$ y por lo tanto $y''=\frac{1}{R}$, es decir, para curvas tendidas la curvatura es prácticamente igual a la segunda derivada.

(desde el punto de vista de las dimensiones:

la ordenada y es una dimensión y (m)

la tangente $y'=\frac{dy}{dx}$ $x \rightarrow 0$ es adimensional y' sin dimensiones

la curvatura $y''=\frac{dy'}{dx}$ $dx \rightarrow 0$ y' (m^{-1}))



RELACIÓN ENTRE CURVATURA Y CARGA LOCAL

El equilibrio vertical de fuerzas requiere que:

$$Pdx + H(y'+y''dx) - Hy' = 0$$

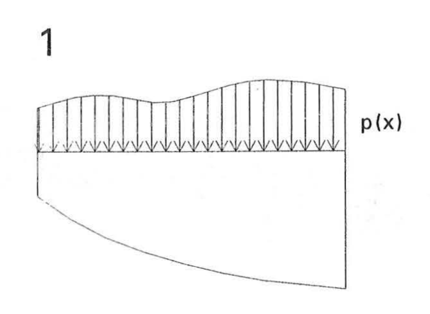
$$P = - Hy''$$

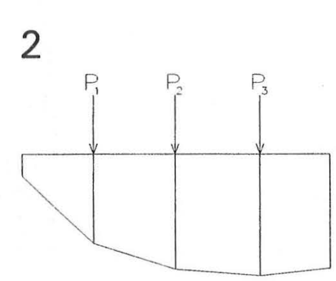
La curvatura es función de la carga local.

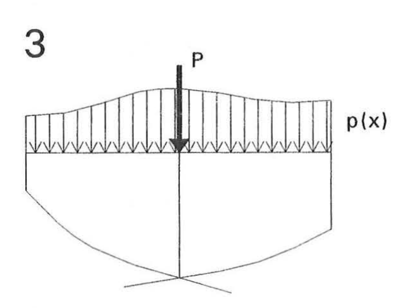
Si en un tramo de hilo hay cargas repartidas en el hilo, ese tramo será curvo (1).

Si las cargas son puntuales el hilo será poligonal (2).

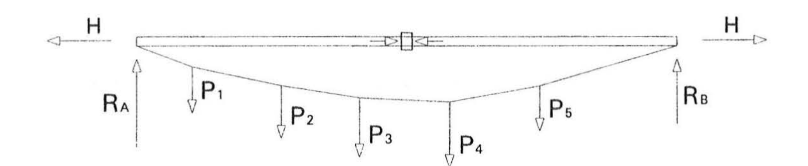
Una carga puntual sobre una repartida da lugar a dos curvas con un punto anguloso (3).







ESTRUCTURAS FUNICULARES

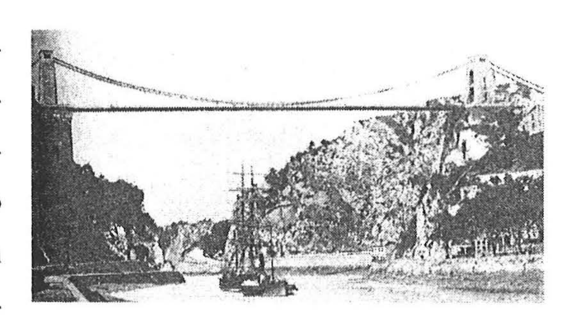


Un solo hilo tensado proporciona una estructura viable con dos peculiaridades:

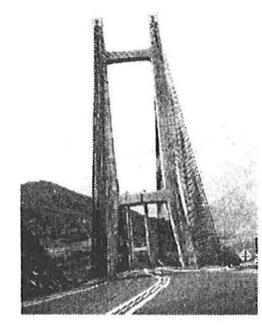
- es preciso o bien que los apoyos sean susceptibles de proporcionar una componente horizontal H de reacción, o bien que exista una barra comprimida que las una, lo que es poco práctico .

- la forma del funicular varía si varían las magnitudes relativas de las acciones del sistema: varía la forma de la estructura, lo que la hace problemática como solución real a emplear en arquitectura.

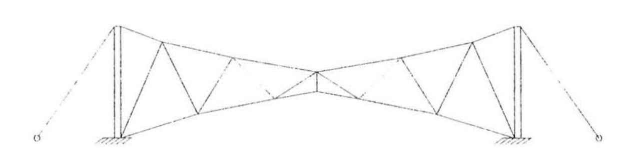
PUENTE COLGANTE



La estabilidad de forma necesaria para una estructura real depende de que las acciones sean prácticamente constantes, lo que sólo sucede en las grandes estructuras como los puentes en las que el peso propio es el factor dominante en las acciones. Aun en estos casos el tablero debe tener una considerable rigidez para repartir las acciones puntuales del tráfico y limitar los cambios de forma.

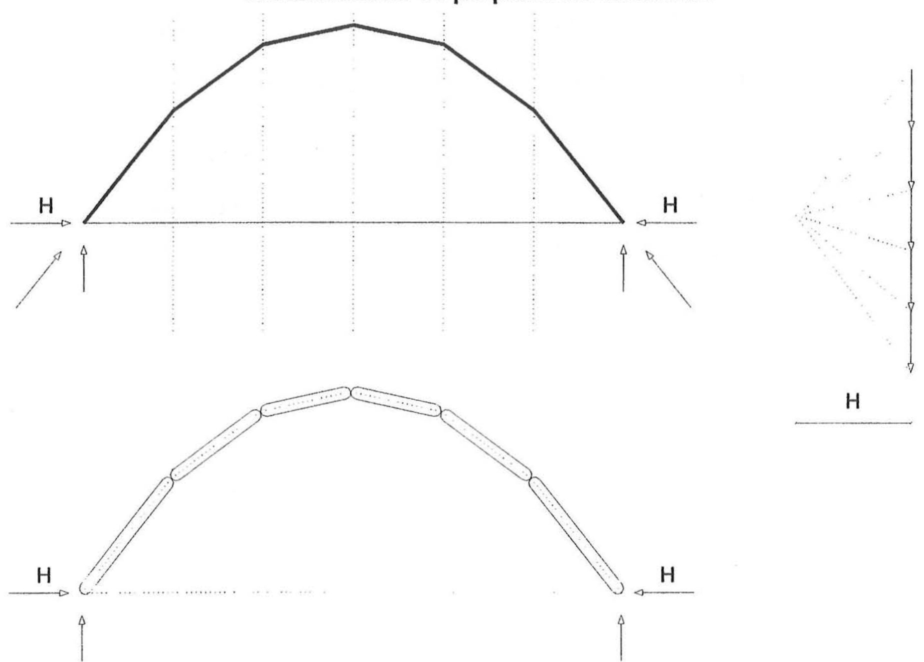


También se recurre en ocasiones a estabilizar la forma mediante otro funicular invertido.



ARCOS

Si se invierte el trazado del funicular se obtiene un **antifunicular** de propiedades idénticas.



La fuerza horizontal H es ahora de **compresión**. Si se materializa una estructura según el esquema antifunicular se tiene un *arco* comprimido que debe o bien estar dotado de una sustentación que resista empujes, o bien tener un tirante traccionado.

El arco presenta el mismo problema de **forma obligada** que el funicular agravado, porque mientras el funicular cambia de forma para adquirir la correspondiente al sistema de acciones, el arco simplemente se cae.

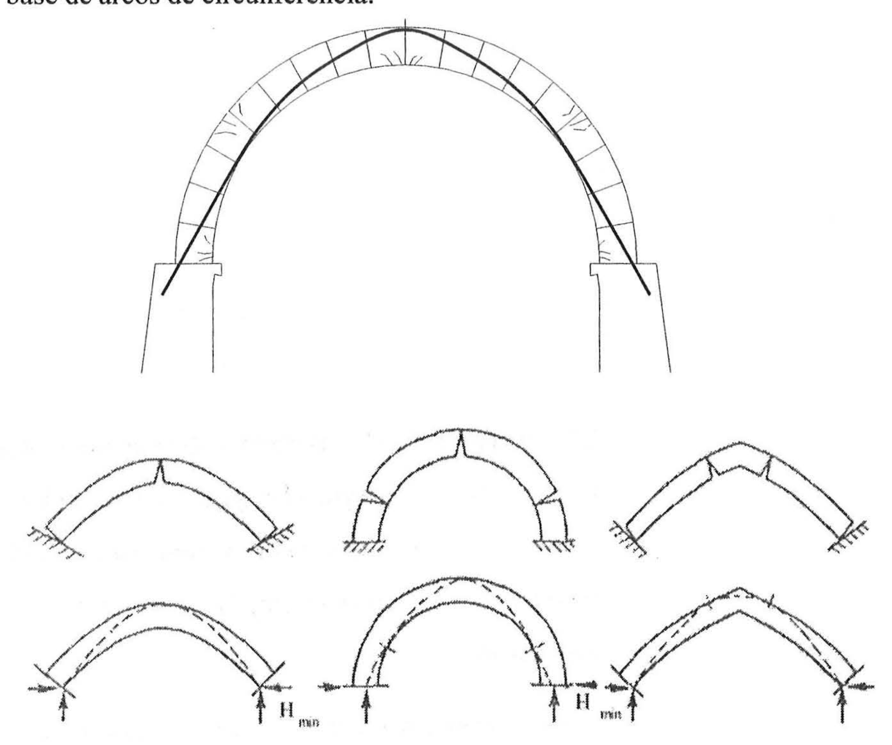
La inestabilidad de los sistemas comprimidos contribuye además a empeorar el problema, aun en el caso de forma adecuada al sistema de acciones.

Para construir arcos reales —que sólo son eficaces si las acciones fijas y seguras, fundamentalmente el peso propio, son dominantes— hay dos recursos:

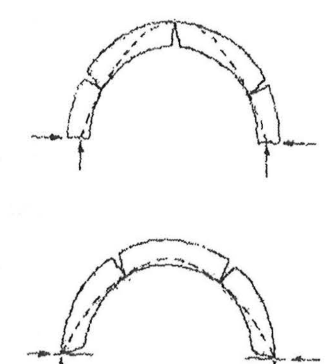
1. Dotar al arco de un *grueso* suficiente como para que el antifunicular siga pasando por dentro para los márgenes de variación previstos.

2. Dotar al arco de rigidez a flexión, lo que no puede hacerse con piedra o ladrillo pero sí con hormigón armado o acero.

En el caso de los arcos de piedra la facilidad de construcción aconseja hacer dovelas iguales, lo que significa construirlos a base de arcos de circunferencia.



Configuraciones de grietas en arcos de fábrica producidas por un incremento de luz

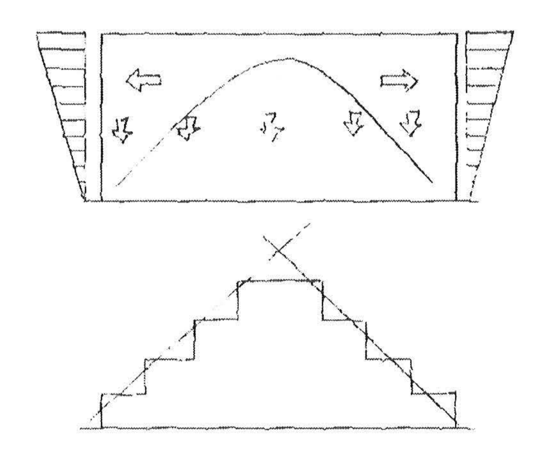


Posiciones extremas de las líneas de empujes

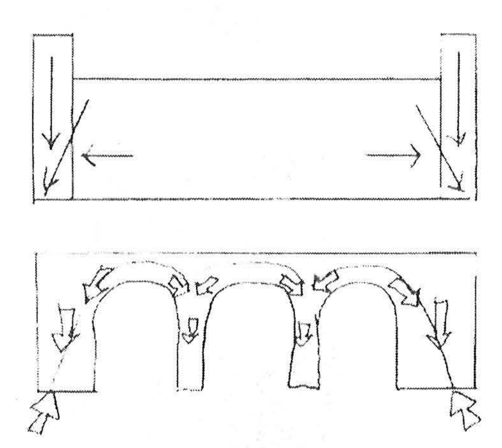
EJEMPLOS

Los empujes horizontales pueden resolverse con tirantes —arquería renacentista, por ejemplo—, o con masas que hagan vertical la resultante —románico, gótico...—

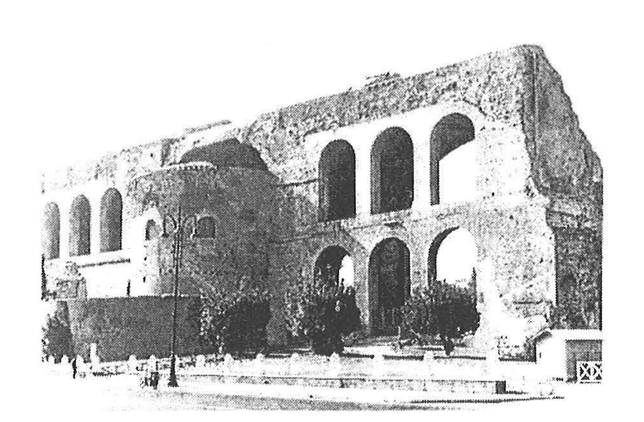
En los puentes de hormigón puede buscarse la rigidez en el arco o en el tablero —puentes de Maillart—.



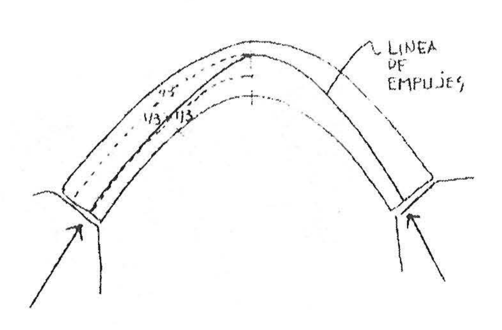
Acciones y estado final de muro sin contrarrestos



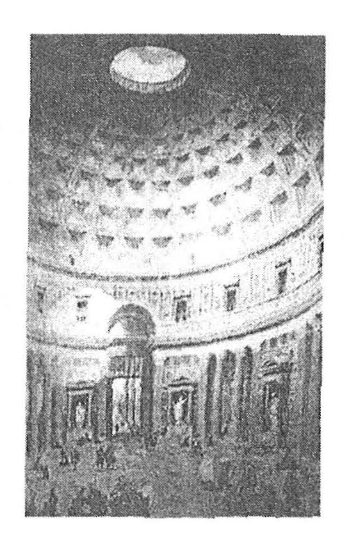
Acciones en muro con contrarrestos

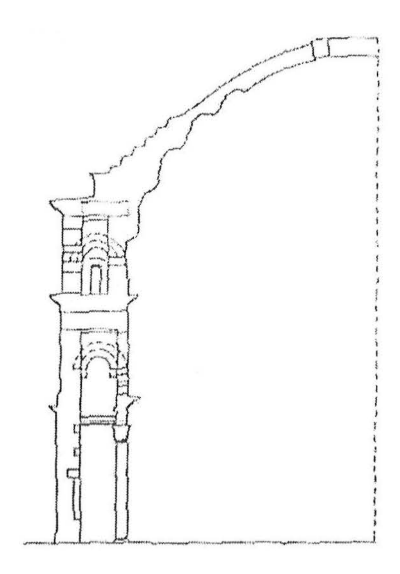


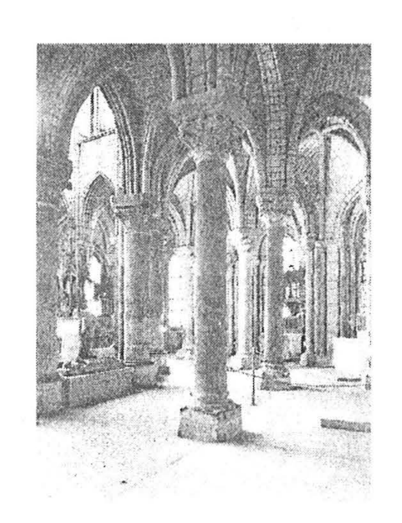
Basílica de Magencio

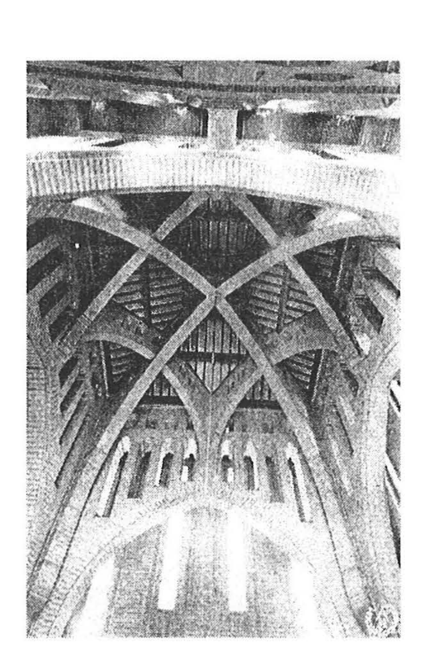


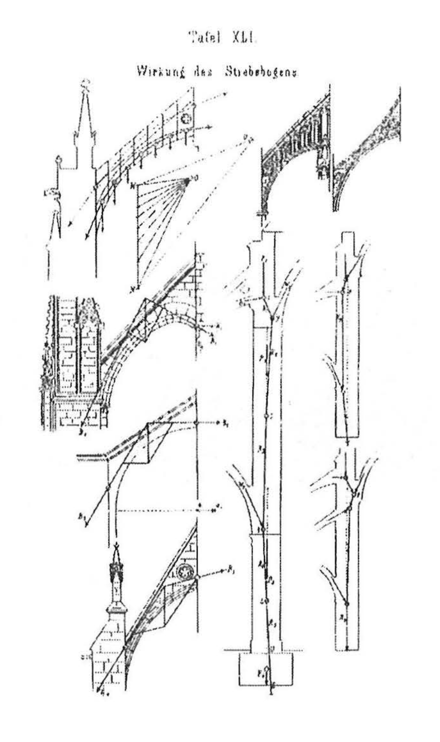
Núcleo central



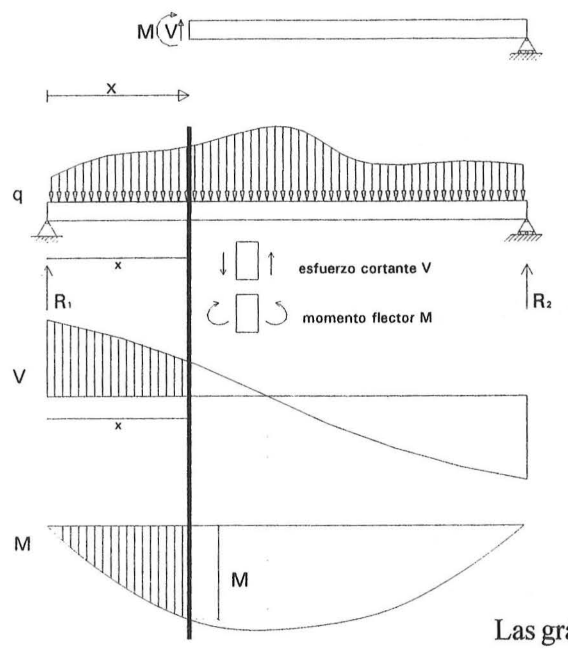







Tafel XLI.
Wirkung des Strebebogens

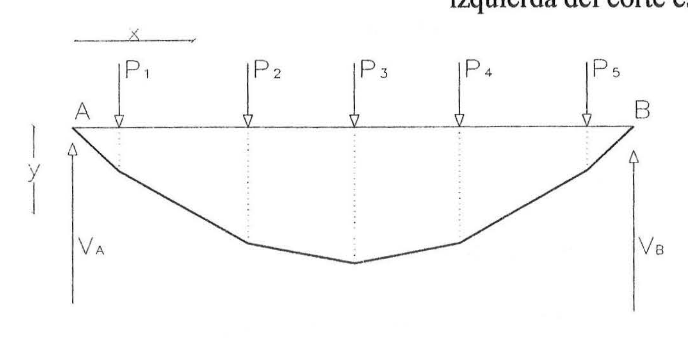
EL FUNICULAR COMO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES



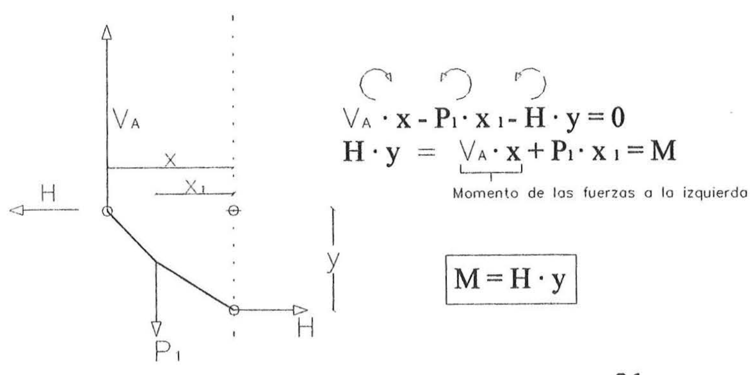
Dando cortes sistemáticos a una distancia x del extremo izquierdo que varía de O a L y representando los valores de la resultante vertical de fuerzas a la izquierda del corte —**esfuerzo cortante V**— y el momento de las fuerzas a la izquierda del corte —**momento flector M**— se obtienen las gráficas representativas de las solicitaciones en la viga, a las que en el caso de que haya fuerzas —acciones o reacciones— no perpendiculares a la directriz, se unirá a la gráfica de esfuerzos normales N.

Las gráficas pueden obtenerse analíticamente pero también los polígonos funiculares suponen una excelente forma de obtener diagramas de momentos y cortantes:

Dado un sistema de acciones el momento de las fuerzas a la izquierda del corte es M = y · H



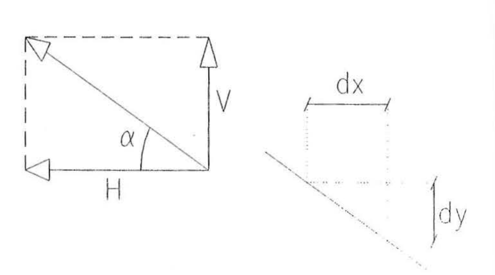
El equilibrio de la parte izquierda del cable requiere



El polígono funicular es la gráfica de momentos; basta multiplicar las ordenadas por la distancia polar H para conocer la escala.

Si la escala de longitudes es por ejemplo 1:50, es decir, 1 cm = 0,5 m , y la distancia polar 20 kN, la escala de momentos será: 1 cm = 0,5 m × 20 kN = 10 kN×m

En cada uno de los tramos la componente vertical de la solicitación será el cortante V.



$$\frac{V}{H}=\frac{dy}{dx} \Rightarrow V = H \cdot y'$$

En el caso de cargas repartidas y recordando que en el funicular -P = y'' · H, pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$P = -H \cdot y''$$

$$V = H \cdot y'$$

$$M = H \cdot y$$

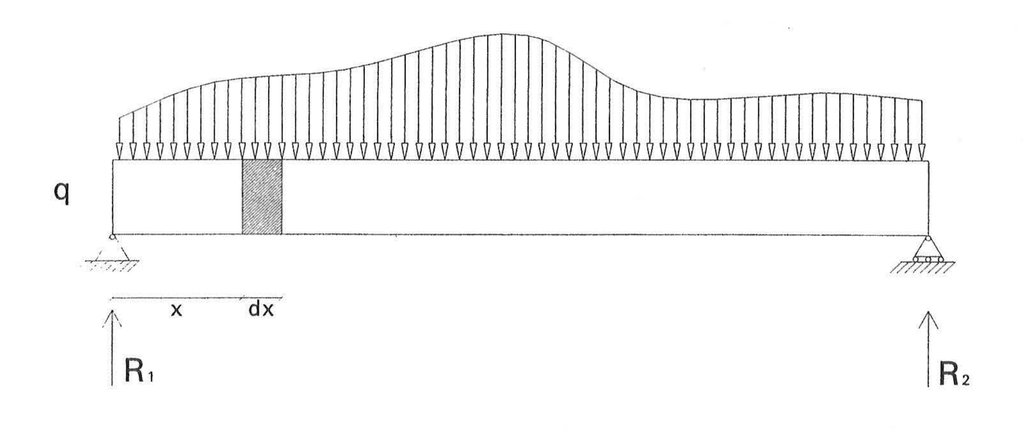
El cuadro de relaciones puede completarse de la siguiente forma:

$$P = -H \cdot y'' = \frac{-dV}{dx} = \frac{-d^2M}{dx^2}$$

$$V = H \cdot y' = \frac{dM}{dx} = R_1 - \int p \cdot dx$$ siendo R_1 la reacción izquierda

$$M = H \cdot y = M_1 + \int V \cdot dx$$ siendo M_1 el momento de extremo izquierdo (si lo hay)

Las relaciones entre cargas, cortantes y momentos en una viga pueden también deducirse de forma directa:



pdx

esfuerzo cortante V

momento flector M

V ↑ p·dx ↓ V + dV — dx

equilibrio de fuerzas verticales $dV + p \cdot dx = 0 \Rightarrow p = -\dfrac{dV}{dx}$

M ↑ ↓ M + dM — dx

equilibrio de momentos $dM = V \cdot dx \Rightarrow V = \dfrac{dM}{dx}$

<u>Momento máximo</u>

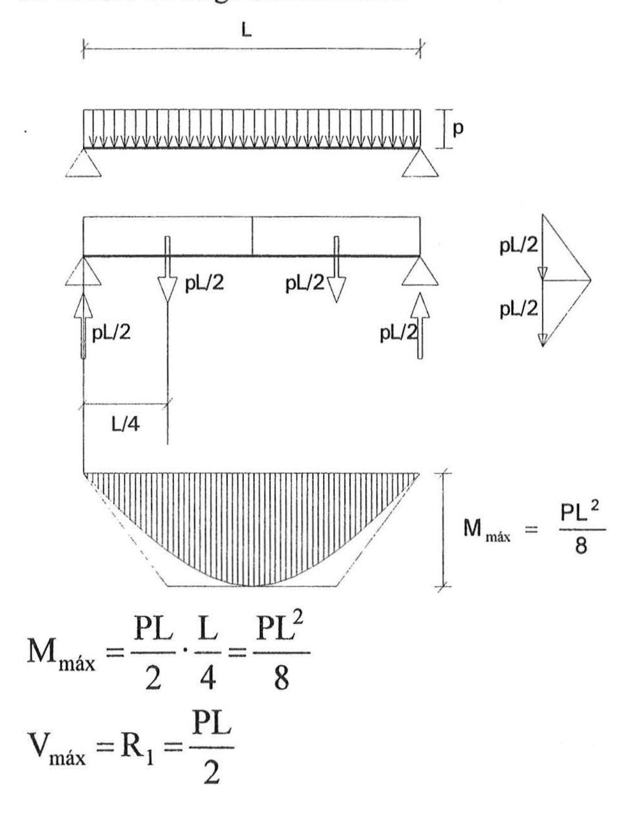
El valor máximo del momento flector corresponderá a $\dfrac{dM}{dx} = 0$ (tangente horizontal de la curva).

Lo que a su vez significa $V = 0$.

El cortante es nulo en el punto de momento máximo.

CARGA UNIFORME

Es el caso de carga más frecuente



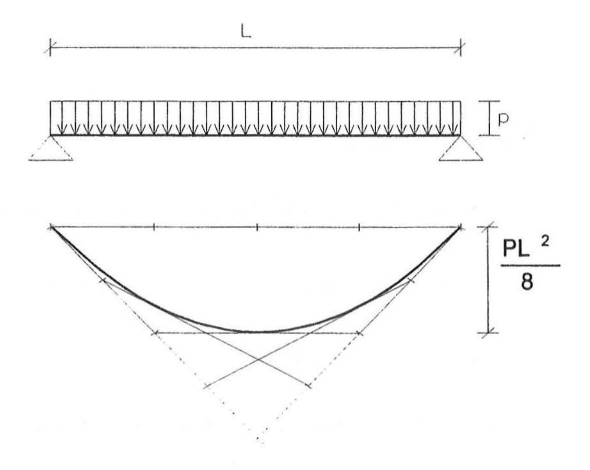
$$M_{máx} = \frac{PL}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{PL^2}{8}$$

$$V_{máx} = R_1 = \frac{PL}{2}$$

La forma de la curva es una parábola ya que y'' es constante lo que corresponde a una expresión del tipo

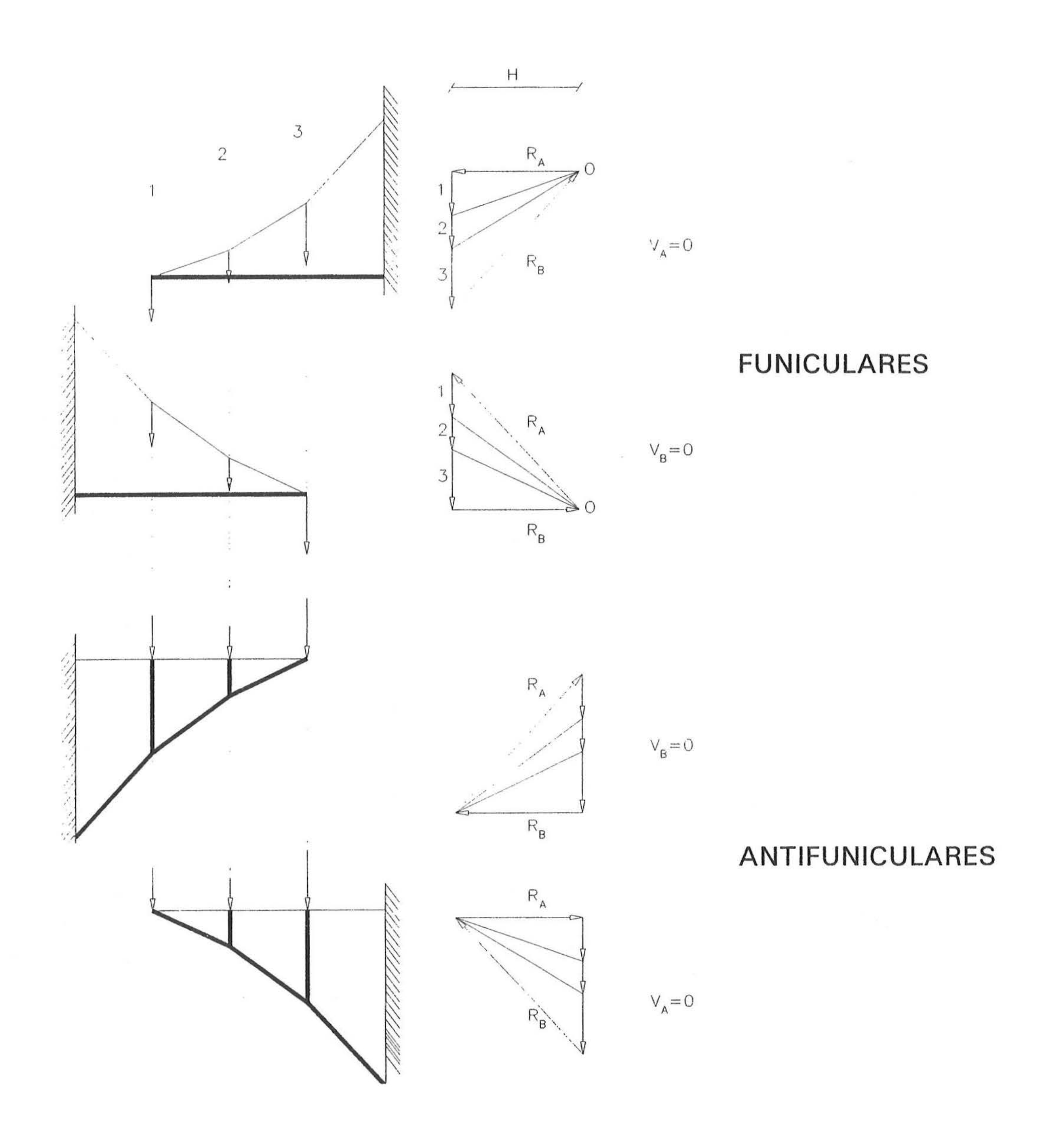
$y = ax^2 + bx + c$

a, b, c pueden determinarse fácilmente por las condiciones de contorno, pero no es preciso, conociendo la envolvente de la parábola su trazado es elemental.

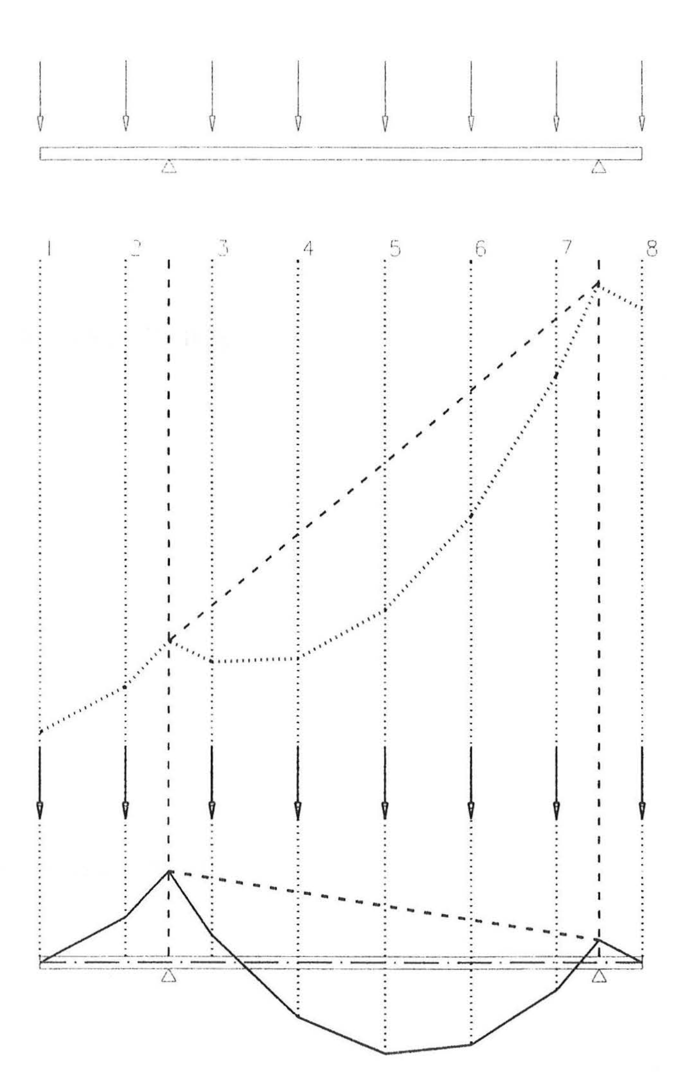


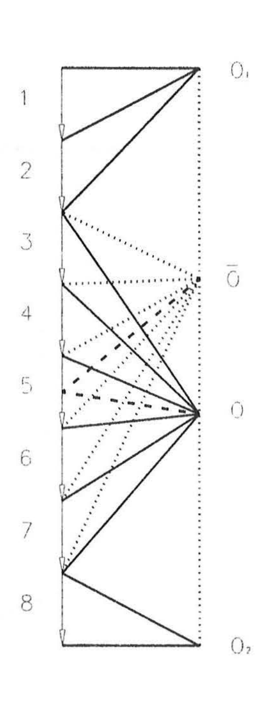
VIGAS CON VOLADIZOS

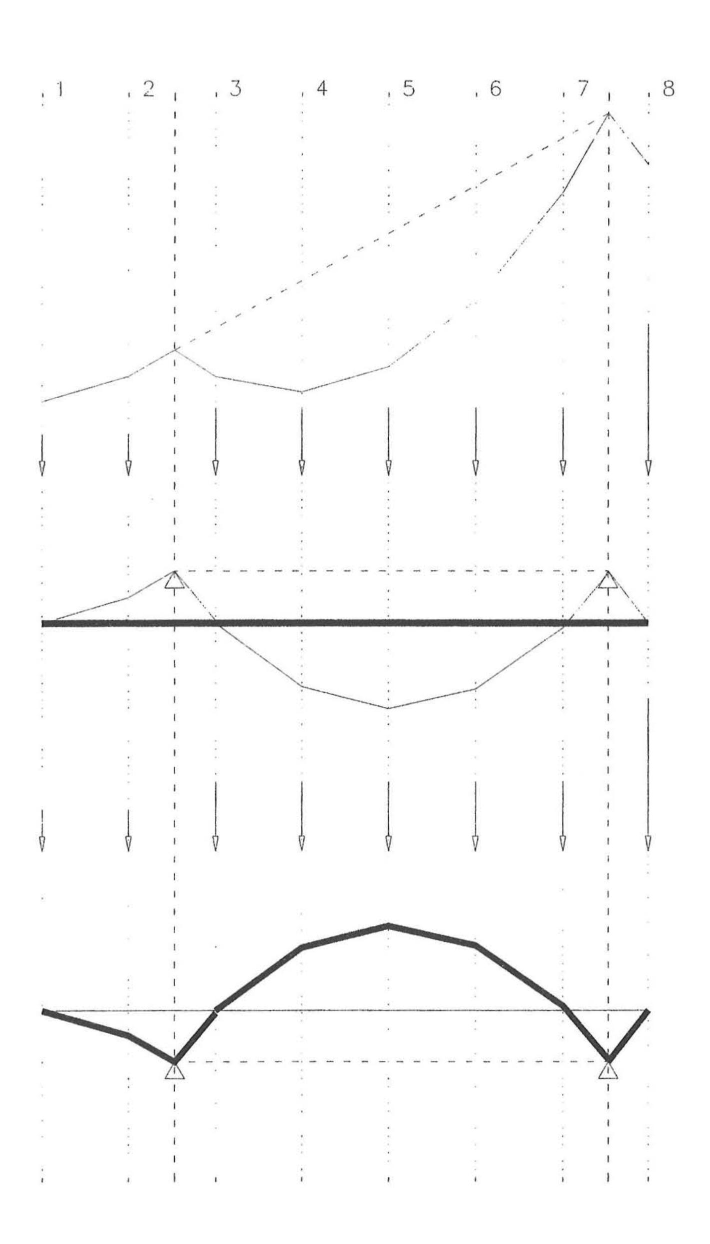
Un extremo en voladizo no tiene reacción, el primer tramo del funicular tiene que ser horizontal por lo que el polo debe estar en la horizontal del extremo correspondiente.



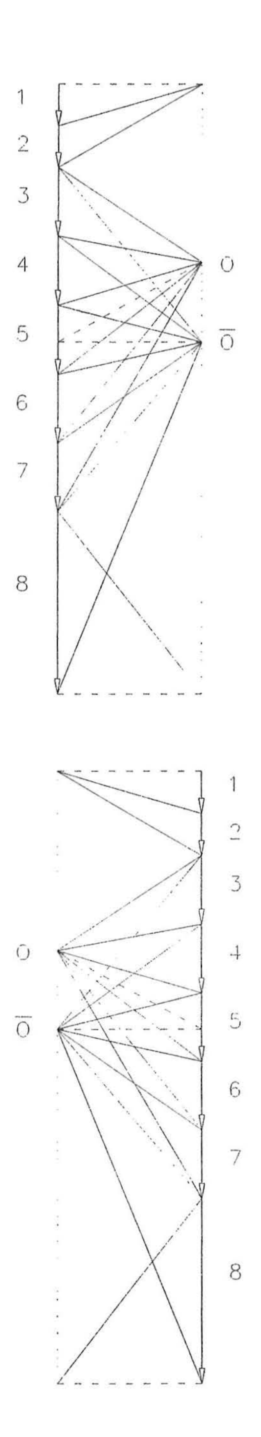
Para trazar la gráfica de momentos de una viga con vuelos se usan polos diferentes O_1 y O_2 para los vuelos.







1
2
3
4
5
6
7
8



1
2
3
4
5
6
7
8
0
$\overline{0}$
1
2
3
4
5
6
7
8
0
$\overline{0}$

NOTAS

CUADERNO

52.06

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

84-9728-155-1